Méthode 5 : développer et simplifier.

Voici encore un moyen de trouver une forme close pour $\square_n$: il s'agit de remplacer la somme de départ par un double somme, apparemment plus compliquée, mais que nous pourrons simplifier si nous la traitons convenablement :

$$\begin{aligned}
\square_n &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^2 = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} k \\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{j\leqslant k\leqslant n} k \\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\frac{j+n}{2}\right)(n-j+1) \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \left(n(n+1)+j-j^2\right) \\
&= \tfrac{1}{2}n^2(n+1)+\tfrac{1}{4}n(n+1)-\tfrac{1}{2}\square_n = \tfrac{1}{2}n(n+\tfrac{1}{2})(n+1)-\tfrac{1}{2}\square_n .
\end{aligned}$$

(Cette dernière étape ressemble un peu à la dernière étape de la méthode de perturbation : dans les deux cas, on obtient une équation contenant l'inconnue dans les deux membres).

A priori, passer d'une somme simple à une somme double peut passer pour une régression. C'est en réalité un progrès, car ainsi apparaissent des sommes plus faciles à manipuler. On ne peut pas espérer résoudre tout problème si on ne fait que simplifier, simplifier et encore simplifier : on ne peut pas atteindre les plus hauts pics d'une montagne en montant continuellement !

Méthode 6 : utiliser le calcul fini.

Méthode 7 : utiliser les fonctions génératrices.

Restez avec nous pour ne pas rater des calculs encore plus passionnants de $\square_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$, avec les techniques que nous allons voir dans les sections et chapitres suivants.

2.6 CALCUL FINI ET INFINI

Nous avons vu un certain nombre de méthodes pour la manipulation directe des sommes. Il est temps maintenant d'acquérir une vision plus large des choses, en regardant le problème de la sommation d'un point de vue plus élevé. Avec le "calcul fini", que les mathématiciens ont développé par analogie avec le calcul infinitésimal, il est possible d'approcher les problèmes de sommation de façon agréable et systématique.

Le calcul infinitésimal est basé sur les propriétés de l'opérateur de *dérivation* D, défini par

$$Df(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} .$$

Le calcul fini, quant à lui, est basé sur les propriétés de l'opérateur de *différence* Δ, défini par

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x). \tag{2.42}$$

C'est l'analogue fini de la dérivation, où on se restreint à des valeurs entières strictement positives de h. De ce fait, la valeur $h = 1$ est la plus proche possible de la "limite" $h \to 0$, et $\Delta f(x)$ est égale à $\big(f(x+h) - f(x)\big)/h$ pour $h = 1$.

Les symboles D et Δ sont appelés des *opérateurs* car ils opèrent sur des fonctions pour donner de nouvelles fonctions ; ce sont des fonctions de fonctions qui produisent des fonctions. Si f est une fonction suffisamment lisse des nombres réels vers les nombres réels, alors Df est aussi une fonction des réels vers les réels. Si f est une *quelconque* fonction des réels vers les réels, Δf l'est aussi. Les valeurs des fonctions Df et Δf en un point x sont données par les définitions ci-dessus.

On apprend vite en mathématiques comment D opère sur les puissances $f(x) = x^m$: dans ce cas $Df(x) = mx^{m-1}$. On peut l'écrire moins formellement en oubliant f :

$$D(x^m) = mx^{m-1}.$$

Ce serait bien si l'opérateur Δ produisait une résultat si élégant ; hélas ce n'est pas le cas. On a par exemple

$$\Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Quelle puissance dans les maths !

Toutefois, il existe un type de "puissance mième" qui se comporte très agréablement quand on lui applique Δ, et c'est précisément ce qui rend le calcul fini intéressant. Ces puissances mièmes nouvelle mouture sont définies par la règle suivante :

$$x^{\underline{m}} = \overbrace{x(x-1)\ldots(x-m+1)}^{m \text{ facteurs}}, \qquad m \text{ entier, } m \geqslant 0. \tag{2.43}$$

Remarquez que m est souligné ; cela signifie que les m facteurs sont supposés diminuer pas à pas. Il existe aussi une définition pour les facteurs qui augmentent :

$$x^{\overline{m}} = \overbrace{x(x+1)\ldots(x+m-1)}^{m \text{ facteurs}}, \qquad m \text{ entier, } m \geqslant 0. \tag{2.44}$$

Quand $m = 0$, on a $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$, car par convention un produit sans facteur est égal à 1 (tout comme une somme sans termes est égale à 0).

La quantité $x^{\underline{m}}$ est appelée "x puissance m descendante", tandis que $x^{\overline{m}}$ est appelée "x puissance m montante". On désigne aussi ces fonctions sous

les noms de *puissance factorielle descendante* et *puissance factorielle montante* car elles sont étroitement liées à la fonction factorielle $n! = n(n-1)\dots(1)$. Effectivement, $n! = n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}}$.

On trouve plusieurs notations pour les puissances factorielles dans la littérature mathématique, notamment le "symbole de Pochhammer" $(x)_m$ qui désigne $x^{\overline{m}}$ ou $x^{\underline{m}}$; on peut trouver aussi des notations comme $x^{(m)}$ ou $x_{(m)}$ pour $x^{\underline{m}}$. Cependant la convention souligné/surligné l'emporte car elle est facile à écrire, à retenir, et ne contient pas de parenthèses redondantes.

La terminologie mathématique est parfois complètement dingue : en fait, Pochhammer [293] a utilisé la notation $(x)_m$ pour désigner le coefficient binomial $\binom{x}{m}$, non les puissances factorielles.

Les puissances factorielles descendantes $x^{\underline{m}}$ se comportent de façon particulièrement agréable lorsqu'on leur applique Δ. En effet,

$$\begin{aligned}\Delta(x^{\underline{m}}) &= (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} \\ &= (x+1)x\dots(x-m+2) \;-\; x\dots(x-m+2)(x-m+1) \\ &= m\,x(x-1)\dots(x-m+2)\,,\end{aligned}$$

ce qui donne au calcul fini une règle pratique, similaire à $D(x^m) = mx^{m-1}$:

$$\Delta(x^{\underline{m}}) = m x^{\underline{m-1}}. \tag{2.45}$$

L'opérateur D du calcul infinitésimal a un inverse, l'opérateur d'intégration $\int$. Le Théorème Fondamental du Calcul Infinitésimal lie D à $\int$:

$$g(x) = Df(x) \quad \text{si et seulement si} \quad \int g(x)\,dx = f(x) + C\,.$$

où $\int g(x)dx$, l'intégrale indéfinie de $g(x)$, désigne l'ensemble des fonctions dont la dérivée est $g(x)$. De façon analogue, Δ a un inverse, l'opérateur de sommation) $\sum$. On peut ainsi énoncer un autre Théorème Fondamental :

"Quemadmodum ad differentiam denotandam usi sumus signo Δ, ita summam indicabimus signo Σ. ... ex quo æquatio $z = \Delta y$, si invertatur, dabit quoque $y = \Sigma z + C$."
—L. Euler [110]

$$g(x) = \Delta f(x) \quad \text{si et seulement si} \quad \sum g(x)\,\delta x = f(x) + C\,. \tag{2.46}$$

où $\sum g(x)\,\delta x$, la *somme indéfinie* de $g(x)$, désigne l'ensemble des fonctions dont la *différence* est $g(x)$ (remarquez que le δ minuscule est lié au Δ majuscule, comme d l'est à D). Le "C", pour une intégrale indéfinie, représente une constante arbitraire ; lorsqu'il s'agit d'une somme indéfinie, il peut représenter toute fonction $p(x)$ telle que $p(x+1) = p(x)$. Par exemple, C pourrait être la fonction périodique $a + b\sin 2\pi x$; une telle fonction disparaît quand on calcule les différences, tout comme une constante disparaît lorsqu'on calcule une dérivée. Pour des valeurs entières de x, la fonction C est constante.

Nous arrivons maintenant au plat de résistance. En calcul infinitésimal, ont rencontre aussi des intégrales *définies* : si $g(x) = Df(x)$, alors

$$\int_a^b g(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)\,.$$

De même, le calcul fini, prenant toujours modèle sur son cousin plus célèbre, a ses *sommes* définies : si $g(x) = \Delta f(x)$, alors

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x \;=\; f(x)\Big|_a^b \;=\; f(b) - f(a)\,. \tag{2.47}$$

Cette formule donne un sens à la notation $\sum_a^b g(x)\,\delta x$, de la même façon que la précédente définit $\int_a^b g(x)\,dx$.

Quel est, intuitivement, le véritable sens de l'expression $\sum_a^b g(x)\,\delta x$? Nous l'avons définie pour pouvoir retenir aisément les règles du calcul fini ; mais cette notation restera inutile si nous ne comprenons pas sa signification. Essayons de l'appréhender, d'abord en regardant quelques cas particuliers. Supposons que $g(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Si $b = a$, alors

$$\sum\nolimits_a^a g(x)\,\delta x \;=\; f(a) - f(a) \;=\; 0\,.$$

Puis, si on pose $b = a + 1$, on trouve

$$\sum\nolimits_a^{a+1} g(x)\,\delta x \;=\; f(a+1) - f(a) \;=\; g(a)\,.$$

Plus généralement, si b augmente de 1, alors on a

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_a^{b+1} g(x)\,\delta x \;-\; \sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x \;&=\; \big(f(b+1) - f(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big)\\ &=\; f(b+1) - f(b) \;=\; g(b)\,.\end{aligned}$$

Avec l'aide de l'induction mathématique, ces observations nous permettent de déduire exactement la signification de $\sum_a^b g(x)\,\delta x$, lorsque a et b sont des entiers tels que $b \geqslant a$:

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x \;=\; \sum_{k=a}^{b-1} g(k) \;=\; \sum_{a\leqslant k<b} g(k)\,, \quad \text{pour } b \geqslant a \text{ entiers.} \tag{2.48}$$

Et vous appelez ça un plat de résistance ?

En d'autres termes, la somme définie est pareille à une somme ordinaire avec ses limites, sauf qu'on exclut la valeur limite supérieure.

Essayons de présenter ceci un peu différemment. Soit une somme dont nous cherchons une forme close. Supposons que nous pouvons l'exprimer sous la forme $\sum_{a\leqslant k<b} g(k) = \sum_a^b g(x)\,\delta x$. Selon la théorie du calcul fini, la réponse peut s'écrire $f(b) - f(a)$, si on connaît une somme indéfinie ou une fonction f telle que $g(x) = f(x+1) - f(x)$. On comprend ce principe si on écrit entièrement $\sum_{a\leqslant k<b}$ en utilisant les points de suspension :

$$\begin{aligned}\sum_{a\leqslant k<b} \big(f(k+1) - f(k)\big) \;=\; &\big(f(a+1) - f(a)\big) + \big(f(a+2) - f(a+1)\big) + \cdots\\ &+ \big(f(b-1) - f(b-2)\big) + \big(f(b) - f(b-1)\big)\,.\end{aligned}$$

Tout ce qui est dans le membre de droite disparaît, sauf $f(b) - f(a)$, qui est donc la valeur de la somme (on dit souvent que les sommes du type $\sum_{a \leqslant k < b}(f(k-1) - f(k))$ sont *télescopiques*, par analogie avec un télescope pliant, car l'épaisseur des parois d'un télescope replié est uniquement déterminée par le rayon externe du tube externe et le rayon interne du tube interne).

Tiens ! Jusqu'ici, je croyais que c'était parce qu'une expression très longue se repliait pour en former une beaucoup plus courte.

La règle (2.48) est valable seulement quand $b \geqslant a$. Que se passe-t-il si $b < a$? Dans ce cas, (2.47) nous dit qu'on doit avoir

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x &= f(b) - f(a) \\ &= -\big(f(a) - f(b)\big) = -\sum\nolimits_b^a g(x)\,\delta x\,. \end{aligned}$$

C'est tout à fait analogue à ce qui se passe pour une intégrale définie. Par un argument similaire on prouve que $\sum_a^b + \sum_b^c = \sum_a^c$, exactement comme $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$. Plus formellement,

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x + \sum\nolimits_b^c g(x)\,\delta x = \sum\nolimits_a^c g(x)\,\delta x\,, \tag{2.49}$$

pour tous a, b et c entiers.

En ce moment, il y a certainement des lecteurs qui commencent à se demander à quoi peuvent bien servir ces analogies. Disons pour commencer que la sommation définie nous fournit un moyen simple de calculer des sommes de puissances descendantes : on déduit des règles de base (2.45), (2.47) et (2.48) la règle générale

Les autres se le demandent déjà depuis un certain temps.

$$\sum_{0 \leqslant k < n} k^{\underline{m}} = \left.\frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\right|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}\,, \qquad \text{pour } m, n \geqslant 0 \text{ entiers.} \tag{2.50}$$

Cette formule est facile à retenir car elle ressemble beaucoup à $\int_0^n x^m\,dx = n^{m+1}/(m+1)$ qui nous est plus familière.

En particulier, lorsque $m = 1$ on a $k^{\underline{1}} = k$. Ainsi, grâce aux principes du calcul fini, on pourra aisément se rappeler que

$$\sum_{0 \leqslant k < n} k = \frac{n^{\underline{2}}}{2} = n(n-1)/2\,.$$

La méthode des sommes définies nous fait aussi soupçonner que les sommes sur $0 \leqslant k < n$ sont souvent plus simples que les sommes sur $1 \leqslant k \leqslant n$: les premières sont simplement égales à $f(n) - f(0)$, tandis qu'on doit voir les autres comme $f(n+1) - f(1)$.

On peut aussi exprimer les puissances ordinaires en fonction de puissances descendantes. Par exemple,

$$k^2 = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}\,,$$

et donc

$$\sum_{0\leqslant k<n} k^2 = \frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \tfrac{1}{3}n(n-1)(n-2+\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{3}n(n-\tfrac{1}{2})(n-1)\,.$$

Avec des amis comme ça...

En remplaçant n par $n+1$, on obtient une nouvelle façon de calculer une forme close pour notre vieil ami $\square_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} k^2$.

Plutôt facile, non ? C'est effectivement plus facile que tous les traitements que nous avons infligés à cette pauvre formule dans la section précédente. Essayons maintenant de franchir une étape supplémentaire, en passant des carrés aux *cubes*. Un calcul simple montre que

$$k^3 = k^{\underline{3}} + 3k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}\,.$$

(Nous verrons au chapitre 6 qu'il est toujours possible de convertir les puissances ordinaires en puissances factorielles ; on utilise pour cela les nombres de Stirling). Ainsi

$$\sum_{a\leqslant k<b} k^3 = \left.\frac{k^{\underline{4}}}{4} + k^{\underline{3}} + \frac{k^{\underline{2}}}{2}\right|_a^b .$$

Les puissances descendantes sont donc très pratiques pour les sommes. Cependant, s'il faut convertir nos bonnes vieilles puissances ordinaires en puissances descendantes pour les sommer, puis les reconvertir en puissances ordinaires avant de faire quoi que ce soit d'autre, ce ne sera pas franchement pratique. Heureusement, les puissances factorielles ont de bonnes propriétés additives ; nous pourrons donc souvent travailler directement avec elles. Par exemple, tout comme $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, il se trouve que $(x+y)^{\underline{2}} = x^{\underline{2}} + 2x^{\underline{1}}y^{\underline{1}} + y^{\underline{2}}$. La même analogie est possible entre $(x+y)^m$ et $(x+y)^{\underline{m}}$ (la preuve de ce "théorème du binôme factoriel" constitue l'exercice 5.37).

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que les puissances descendantes qui ont des exposants positifs ou nuls. Pour étendre l'analogie avec les puissances ordinaires aux exposants négatifs, il nous faut une définition appropriée de $x^{\underline{m}}$ pour $m < 0$. Si l'on observe la suite

$$\begin{aligned} x^{\underline{3}} &= x(x-1)(x-2)\,,\\ x^{\underline{2}} &= x(x-1)\,,\\ x^{\underline{1}} &= x\,,\\ x^{\underline{0}} &= 1\,, \end{aligned}$$

on remarque qu'en divisant par $x-2$, puis par $x-1$, puis par x, on passe de $x^{\underline{3}}$ à $x^{\underline{2}}$, puis à $x^{\underline{1}}$, puis à $x^{\underline{0}}$. Il semble raisonnable (sinon impératif) de diviser ensuite par $x+1$ pour passer de $x^{\underline{0}}$ à $x^{\underline{-1}}$, obtenant $x^{\underline{-1}} = 1/(x+1)$.

En continuant ainsi, on peut écrire les premières puissances factorielles à exposant négatif :

$$\begin{aligned} x^{\underline{-1}} &= \frac{1}{x+1}, \\ x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)}, \\ x^{\underline{-3}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \end{aligned}$$

Voici donc la définition des puissances descendantes négatives :

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}, \qquad \text{pour } m > 0. \tag{2.51}$$

(On peut aussi définir les puissances descendantes pour des nombres réels ou même complexes ; nous verrons cela au chapitre 5).

Cette définition a le mérite de donner aux puissances descendantes de bonnes propriétés additives. Parmi celles-ci, la plus importante est probablement l'analogue de la règle générale

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

pour les puissances ordinaires. Pour les puissances descendantes, cela donne

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}, \qquad \text{pour } m \text{ et } n \text{ entiers.} \tag{2.52}$$

Par exemple, $x^{\underline{2+3}} = x^{\underline{2}}(x-2)^{\underline{3}}$, et pour un n négatif on a

$$x^{\underline{2-3}} = x^{\underline{2}}(x-2)^{\underline{-3}} = x(x-1)\frac{1}{(x-1)x(x+1)} = \frac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}}.$$

Si nous avions choisi de définir $x^{\underline{-1}}$ comme $1/x$ au lieu de $1/(x+1)$, la règle (2.52) n'aurait pas été valable dans certains cas, comme celui où $m = -1$ et $n = 1$. En fait, on aurait pu utiliser (2.52) pour savoir exactement comment définir les puissances descendantes à exposants négatifs ; il suffisait de poser $m = -n$. Quand, dans le but d'élargir son champ d'application, on étend une notation existante, il vaut toujours mieux concevoir les définition de sorte que les règles classiques soient toujours valables.

Les règles des puissances sont puissantes.

Maintenant, assurons-nous que la propriété cruciale de l'opérateur de différence s'applique encore à nos nouvelles puissances descendantes. Est-il toujours vrai que $\Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}}$ lorsque $m < 0$? Si $m = 2$, par exemple, la différence vaut

$$\Delta x^{\underline{-2}} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$= -2x^{\underline{-3}}.$$

Oui, ça marche ! Un argument similaire permet de généraliser à tout $m < 0$.

Ainsi la propriété de sommation (2.50) est valable aussi bien pour les puissances descendantes négatives que pour les positives, du moins tant qu'il n'y a pas de division par zéro :

$$\sum_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \left.\frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\right|_a^b, \qquad \text{pour } m \neq -1.$$

Qu'arrive-t-il si $m = -1$? Rappelons que, pour l'intégration, on a

$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \ln x\Big|_a^b.$$

Ce serait bien d'avoir un analogue fini de $\ln x$. Il s'agit de trouver une fonction $f(x)$ telle que

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1} = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Il n'est pas très difficile de voir que, si x est entier,

$$f(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x}$$

est une telle fonction. Elle est exactement égale au nombre harmonique H_x de (2.13). Ainsi H_x est l'analogue discret de la fonction continue $\ln x$. (Dans le chapitre 6, nous définirons H_x pour des x non entiers, mais pour l'instant les valeurs entières nous suffisent. Nous verrons aussi au chapitre 9 que, lorsque x est grand, la valeur de $H_x - \ln x$ est à peu près égale à $0,577 + 1/(2x)$. Ainsi, non seulement H_x et $\ln x$ sont analogues, mais de plus, dans la plupart des cas, leurs valeurs diffèrent de moins de 1).

Exactement 0,577 ? Peut-être qu'ils veulent dire $1/\sqrt{3}$. Ou peut-être pas.

Nous pouvons maintenant décrire complètement les sommes des puissances descendantes :

$$\sum_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\right|_a^b, & \text{si } m \neq -1; \\ H_x\Big|_a^b, & \text{si } m = -1. \end{cases} \tag{2.53}$$

Cette formule explique pourquoi les nombres harmoniques ont tendance à surgir dans la solution de certains problèmes discrets comme l'analyse du tri rapide ; c'est exactement de la même manière que les logarithmes

dits naturels apparaissent naturellement dans les solutions de problèmes continus.

Maintenant que nos avons trouvé un analogue de $\ln x$, voyons s'il y en a un pour e^x. Quelle est la fonction $f(x)$ pour laquelle $\Delta f(x) = f(x)$, ce qui correspond à $De^x = e^x$? Facile :

$$f(x+1) - f(x) \;=\; f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x+1) \;=\; 2f(x)\,;$$

On déduit de cette simple récurrence que $f(x) = 2^x$ est qualifiée pour être la fonction exponentielle discrète.

Si c est un nombre quelconque, la différence de c^x est aussi très simple :

$$\Delta(c^x) \;=\; c^{x+1} - c^x \;=\; (c-1)c^x\,.$$

Par conséquent, l'anti-différence de c^x est $c^x/(c-1)$ si $c \neq 1$. Ce fait, allié aux règles fondamentales (2.47) et (2.48), nous donne un moyen élégant de comprendre la formule générale qui donne la somme d'une progression géométrique :

$$\sum_{a \leqslant k < b} c^k \;=\; \sum\nolimits_a^b c^x\,\delta x \;=\; \frac{c^x}{c-1}\bigg|_a^b \;=\; \frac{c^b - c^a}{c-1}\,, \qquad \text{pour } c \neq 1.$$

Chaque fois qu'on cherche une formule close pour une fonction f, on peut calculer sa différence $\Delta f = g$. On obtient alors une fonction g dont on connaît la somme indéfinie $\sum g(x)\,\delta x$. La table 59 fournit une aide à la sommation : on y trouve la différence et l'anti-différence de quelques fonctions usuelles.

La "table 59" est en page 59. Pigé ?

Malgré tous les parallèles que l'on peut faire entre le mathématiques continues et les mathématiques discrètes, il y a des notions continues qui n'ont pas d'analogue discret. Par exemple, en calcul infinitésimal, il existe une règle pratique pour trouver la dérivée d'une fonction composée. En calcul fini, il n'y a pas d'équivalent à cette règle. Il est généralement difficile d'effectuer un changement de variable discret, sauf dans certains cas où l'on peut, par exemple, remplacer x par $c \pm x$.

En revanche, $\Delta\big(f(x)\,g(x)\big)$ peut s'exprimer de façon assez plaisante, et nous fournit ainsi une règle de *sommation par parties*, l'analogue fini de l'*intégration par parties* du calcul infinitésimal. Rappelons que de la formule

$$D(uv) \;=\; u\,Dv + v\,Du$$

du calcul infinitésimal on déduit, en intégrant puis réorganisant les termes, la règle d'intégration par partie

$$\int u\,Dv \;=\; uv - \int v\,Du\,.$$

Table 59 Quelle est la différence ?

$f = \Sigma g$	$\Delta f = g$	$f = \Sigma g$	$\Delta f = g$
$x^{\underline{0}} = 1$	0	2^x	2^x
$x^{\underline{1}} = x$	1	c^x	$(c-1)c^x$
$x^{\underline{2}} = x(x-1)$	$2x$	$c^x/(c-1)$	c^x
$x^{\underline{m}}$	$mx^{\underline{m-1}}$	cf	$c\Delta f$
$x^{\underline{m+1}}/(m+1)$	$x^{\underline{m}}$	$f+g$	$\Delta f + \Delta g$
H_x	$x^{\underline{-1}} = 1/(x+1)$	fg	$f\Delta g + Eg\Delta f$

On peut faire quelque chose de similaire en calcul fini.

Commençons par appliquer l'opérateur de différence au produit de deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta\big(u(x)\,v(x)\big) &= u(x{+}1)\,v(x{+}1) - u(x)\,v(x)\\ &= u(x{+}1)\,v(x{+}1) - u(x)\,v(x{+}1)\\ &\qquad\qquad + u(x)\,v(x{+}1) - u(x)\,v(x)\\ &= u(x)\,\Delta v(x) \;+\; v(x{+}1)\,\Delta u(x)\,. \end{aligned} \tag{2.54}$$

En utilisant l'*opérateur de décalage* E défini par

$$Ef(x) \;=\; f(x+1)\,,$$

on peut mettre cette formule sous une forme plus pratique :

$$\Delta(uv) \;=\; u\,\Delta v \;+\; Ev\,\Delta u\,. \tag{2.55}$$

En calcul infinitésimal, on se débarrasse du E en faisant tendre 1 vers 0.

(Le E est un peu gênant, mais il est nécessaire pour que l'équation soit correcte). En prenant la somme indéfinie de chacun des deux termes de cette équation, puis en les réorganisant, on obtient, comme promis, la règle de sommation par parties :

$$\sum u\,\Delta v \;=\; uv - \sum Ev\,\Delta u\,. \tag{2.56}$$

Comme en calcul infinitésimal, on peut obtenir ainsi des sommes définies en ajoutant des bornes sur les trois termes.

Cette règle est très pratique quand la somme de gauche est plus difficile à calculer que celle de droite. Prenons un exemple. La fonction $\int xe^x\,dx$ est typiquement une fonction qu'on intègre par parties ; son analogue discret est $\sum x2^x\delta x$, que nous avons déjà rencontré dans ce chapitre sous la forme $\sum_{k=0}^{n} k\,2^k$. Pour sommer ceci par parties, posons $u(x) = x$ et $\Delta v(x) = 2^x$. Ainsi $\Delta u(x) = 1$, $v(x) = 2^x$ et $Ev(x) = 2^{x+1}$. En appliquant (2.56) on trouve

J'imagine que $e^x = 2^x$ pour des petites valeurs de 1.

$$\sum x2^x\,\delta x \;=\; x2^x - \sum 2^{x+1}\,\delta x \;=\; x2^x - 2^{x+1} + C\,.$$

De plus, en ajoutant des bornes à cette formule, on peut l'utiliser cette formule pour calculer une somme vue précédemment :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k2^k &= \sum\nolimits_0^{n+1} x2^x\,\delta x \\ &= x2^x - 2^{x+1}\Big|_0^{n+1} \\ &= \big((n+1)2^{n+1} - 2^{n+2}\big) - (0\cdot 2^0 - 2^1) \;=\; (n-1)2^{n+1} + 2\,.\end{aligned}$$

Cette méthode est plus facile à utiliser que la méthode de perturbation, parce qu'ici on n'a pas besoin de réfléchir.

Le but ultime des mathématiques, c'est d'éliminer tout appel à l'intelligence.

Plus haut dans ce chapitre, nous étions heureux de trouver, après beaucoup d'efforts, la formule (2.36) pour $\sum_{0\leqslant k<n} H_k$. Nous aurions pu la trouver automatiquement si nous avions connu la sommation par parties. Faisons-en la démonstration en nous attaquant à une somme qui a l'air encore plus difficile, $\sum_{0\leqslant k<n} kH_k$. On trouve aisément la solution en suivant l'analogie avec $\int x \ln x\,dx$: prenons $u(x) = H_x$ et $\Delta v(x) = x = x^{\underline{1}}$; alors $\Delta u(x) = x^{\underline{-1}}$, $v(x) = x^{\underline{2}}/2$, $Ev(x) = (x+1)^{\underline{2}}/2$ et

$$\begin{aligned}\sum xH_x\,\delta x &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \sum \frac{(x+1)^{\underline{2}}}{2}\,x^{\underline{-1}}\,\delta x \\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \frac{1}{2}\sum x^{\underline{1}}\,\delta x \\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \frac{x^{\underline{2}}}{4} + C\,.\end{aligned}$$

(Pour passer de la première ligne à la deuxième, nous avons combiné deux puissances descendantes $(x+1)^{\underline{2}}x^{\underline{-1}}$ en posant $m = -1$ et $n = 2$ dans la règle des puissances (2.52)). Nous pouvons maintenant ajouter des bornes et conclure que

$$\sum_{0\leqslant k<n} kH_k = \sum\nolimits_0^n xH_x\,\delta x = \frac{n^{\underline{2}}}{2}\Big(H_n - \tfrac{1}{2}\Big)\,. \tag{2.57}$$

2.7 · SOMMES INFINIES

Lorsque nous avons défini la notation $\sum$ au début de ce chapitre, nous avons finassé lorsqu'est apparu le problème des sommes infinies en disant, en substance, "remettons cela à plus tard ; pour l'instant, nous pouvons supposer que toutes les sommes que nous rencontrons ont un nombre fini de termes non nuls". Il est temps maintenant de regarder les choses en face : il existe des sommes infinies. En fait, c'est à la fois une bonne et une mauvaise nouvelle.

C'est ça, finasser ?

Il suffit de montrer que cette assertion est vraie lorsque tous les termes sont positifs ou nuls, car on peut prouver le cas général en séparant tout en parties imaginaire et réelle, puis en parties positive et négative comme nous l'avons déjà vu. Supposons donc que $a_{j,k} \geqslant 0$ pour tout couple $(j,k) \in M$, où M est l'ensemble d'indices $\{(j,k) \mid j \in J, k \in K_j\}$.

Pour tout ensemble fini $F \subseteq M$, nous savons que $\sum_{(j,k)\in M} a_{j,k}$ est fini, donc que

$$\sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} \leqslant A,$$

et que A est le plus petit de ces majorants (la borne supérieure). Si j est un élément quelconque de J, chaque somme de la forme $\sum_{k\in F_j} a_{j,k}$, où F_j est un sous-ensemble fini de K_j, est bornée par A. Donc ces sommes finies ont une borne supérieure $A_j \geqslant 0$, et $\sum_{k\in K_j} a_{j,k} = A_j$ par définition.

Il nous faut encore prouver que A est la borne supérieure de $\sum_{j\in G} A_j$ pour tout ensemble fini $G \subseteq J$. Supposons que G est un sous-ensemble fini de J et que $\sum_{j\in G} a_{j,k} = A' > A$. On peut trouver des sous-ensembles finis $F_j \subseteq K_j$ tels que $\sum_{k\in F_j} a_{j,k} > (A/A')A_j$ pour tout $j \in G$ tel que $A_j > 0$. Il existe au moins un tel j. Mais alors $\sum_{j\in G, k\in F_j} a_{j,k} > (A/A') \sum_{j\in G} A_j = A$, ce qui contredit le fait que $\sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} \leqslant A$ pour tout sous-ensemble fini $F \subseteq M$. Donc $\sum_{j\in G} A_j \leqslant A$ pour tout sous-ensemble fini $G \subseteq J$.

Pour finir, soit A' un nombre réel plus petit que A. Notre preuve sera complète si nous pouvons trouver un ensemble fini $G \subseteq J$ tel que $\sum_{j\in G} A_j > A'$. Nous savons qu'il existe un ensemble fini $F \subseteq M$ tel que $\sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} > A'$; soit G l'ensemble des j de ce F, et soit $F_j = \{k \mid (j,k) \in F\}$. Alors $\sum_{j\in G} A_j \geqslant \sum_{j\in G} \sum_{k\in F_j} a_{j,k} = \sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} > A'$. CQFD.

Bien, nous sommes maintenant légitimés ! Tout ce que nous avons fait avec les sommes infinies est justifié, pourvu qu'il existe une borne finie pour toutes les sommes finies des valeurs absolues des termes. Puisque la somme doublement infinie (2.58) nous a donné deux réponses différentes selon la manière dont nous l'avons évaluée, ses termes positifs $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ doivent forcément diverger vers ∞ ; sinon, nous aurions obtenu la même réponse quelle que soit la façon de grouper les termes.

Exercices

Echauffements

1 Que signifie la notation

$$\sum_{k=4}^{0} q_k \ ?$$

2 Simplifiez l'expression $x \cdot \big([x>0] - [x<0]\big)$.

3 Montrez que vous avez bien compris la notation $\sum$ en développant entièrement les sommes

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant 5} a_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{0\leqslant k^2\leqslant 5} a_{k^2}$$

(attention, la seconde somme est un peu délicate).

4 Ecrivez la somme triple

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4} a_{ijk}$$

comme une sommation en trois parties (avec trois $\sum$),
a en sommant d'abord sur k, puis sur j, enfin sur i ;
b en sommant d'abord sur i, puis sur j, enfin sur k.
Puis écrivez entièrement les sommes triples sans la notation $\sum$, en utilisant des parenthèses pour montrer ce qu'on ajoute d'abord.

5 Qu'est-ce qui cloche dans le calcul suivant ?

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_j}{a_k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} n = n^2.$$

6 Calculez $\sum_k [1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n]$ en fonction de j et n?

7 Soit $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$. Calculez $\nabla(x^{\overline{m}})$.

8 Si m est un entier, quelle est la valeur de $0^{\underline{m}}$?

9 Trouvez un analogue de la règle (2.52) pour les puissances montantes. Utilisez cette règle pour définir $x^{\overline{-n}}$.

10 Nous avons donné la formule suivante pour la différence d'un produit :

$$\Delta(uv) = u\Delta v + Ev\Delta u.$$

Comment peut-elle être correcte, alors que le membre de gauche est symétrique en u et v tandis que le membre de droite ne l'est pas ?

Exercices de base

11 La règle de sommation par parties (2.56) est équivalente à

$$\sum_{0\leqslant k<n} (a_{k+1} - a_k)b_k = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{0\leqslant k<n} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k), \quad \text{pour } n \geqslant 0.$$

Prouvez cette formule directement, en utilisant les règles de distributivité, d'associativité et de commutativité.

12 Montrez que, quelque soit l'entier c, la fonction $p(k) = k + (-1)^k c$ est une permutation sur l'ensemble des entiers.

13 Utilisez la méthode du répertoire pour trouver une forme close de $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$.

14 Calculez $\sum_{k=1}^{n} k2^k$ en la réécrivant $\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} 2^k$.

15 Calculez $\square_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ par la méthode 5 en procédant ainsi : écrivez d'abord $\square_n + \Box_n = 2\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} jk$, puis appliquez (2.33).

16 Montrez que $x^{\underline{m}}/(x-n)^{\underline{m}} = x^{\underline{n}}/(x-m)^{\underline{n}}$, pourvu qu'aucun des dénominateurs ne soit nul.

17 Montrez qu'on peut utiliser les formules suivantes pour convertir factorielles montantes en factorielles descendantes et inversement ($x^{\overline{-m}}$ est défini par la réponse à l'exercice 9) :

$$\begin{aligned} x^{\overline{m}} &= (-1)^m(-x)^{\underline{m}} = (x+m-1)^{\underline{m}} = 1/(x-1)^{\underline{-m}}; \\ x^{\underline{m}} &= (-1)^m(-x)^{\overline{m}} = (x-m+1)^{\overline{m}} = 1/(x+1)^{\overline{-m}}. \end{aligned}$$

18 Soient $\Re z$ et $\Im z$ les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe z. Le module de z, noté $|z|$, est égal à $\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$. On dit qu'une somme $\sum_{k\in K} a_k$ de termes complexes a_k est absolument convergente si les sommes réelles $\sum_{k\in K} \Re a_k$ et $\sum_{k\in K} \Im a_k$ sont toutes deux absolument convergentes. Prouvez que $\sum_{k\in K} a_k$ est absolument convergente si et seulement s'il existe une constante B telle que $\sum_{k\in F} |a_k| \leqslant B$ pour tout sous-ensemble fini $F \subseteq K$.

Devoirs à la maison

19 Utilisez un facteur de sommation pour résoudre la récurrence

$$\begin{aligned} T_0 &= 5; \\ 2T_n &= nT_{n-1} + 3\cdot n!, \qquad \text{pour } n > 0. \end{aligned}$$

20 Essayez de calculer $\sum_{k=0}^{n} kH_k$ par la méthode de perturbation, mais au lieu de cela trouvez la valeur de $\sum_{k=0}^{n} H_k$.

21 Calculez les sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k$ et $U_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k^2$ avec la méthode de perturbation, en supposant que $n \geqslant 0$.

22 Prouvez l'*identité de Lagrange* (sans utiliser l'induction) :

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

Difficile de justifier l'identité de quelqu'un qui est mort depuis 175 ans.

En fait, il s'agit de trouver une identité pour cette somme double plus générale :

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_j b_k - a_k b_j)(A_j B_k - A_k B_j)\,.$$

23 Calculez la somme $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)/k(k+1)$ de deux manières différentes :

a Développez $1/k(k+1)$ en éléments simples : $1/k(k+1) = 1/k - 1/(k+1)$.

b Sommez par parties.

24 Quelle est la valeur de $\sum_{0\leqslant k<n} H_k/(k+1)(k+2)$? *Suggestion :* Généralisez le calcul de (2.57).

Cette notation a été introduite par Jacobi en 1829 [192].

25 La notation $\prod_{k\in K} a_k$ désigne le produit de tous les nombres a_k pour tous les $k \in K$. Supposons pour simplifier que le nombre de k pour lesquels $a_k \neq 1$ est fini ; on n'a donc pas besoin de définir les produits infinis. Quelles sont les règles, analogues à la distributivité, l'associativité et la commutativité pour les $\sum$, que cette notation $\prod$ satisfait ?

26 Exprimez le produit double $\prod_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} a_j a_k$ en fonction du produit simple $\prod_{k=1}^{n} a_k$, en manipulant la notation $\prod$. (Cet exercice nous donne un analogue de la formule du triangle supérieur (2.33)).

27 Calculez $\Delta(c^{\underline{x}})$, puis déduisez du résultat la valeur de $\sum_{k=1}^{n}(-2)^{\underline{k}}/k$.

28 A quel moment le calcul suivant se fourvoie-t-il ?

$$\begin{aligned}
1 = \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}\right)\\
&= \sum_{k\geqslant 1}\sum_{j\geqslant 1}\left(\frac{k}{j}[j=k+1] - \frac{j}{k}[j=k-1]\right)\\
&= \sum_{j\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{k}{j}[j=k+1] - \frac{j}{k}[j=k-1]\right)\\
&= \sum_{j\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{k}{j}[k=j-1] - \frac{j}{k}[k=j+1]\right)\\
&= \sum_{j\geqslant 1}\left(\frac{j-1}{j} - \frac{j}{j+1}\right) = \sum_{j\geqslant 1}\frac{-1}{j(j+1)} = -1.
\end{aligned}$$

Problèmes d'examen

29 Calculez la somme $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k/(4k^2-1)$.

C'est un jeu de cartes (N.d.T.).

30 Les joueurs de Cribbage savent depuis longtemps que $15 = 7+8 = 4+5+6 = 1+2+3+4+5$. Trouvez le nombre de façons d'écrire 1050 comme une somme d'entiers positifs consécutifs. (La représentation triviale

du nombre "1050" par lui-même compte pour une ; il y a donc, non pas trois, mais quatre façons d'écrire 15 comme une somme d'entiers positifs consécutifs. Ajoutons qu'il n'est pas besoin de connaître les règles du Cribbage pour résoudre ce problème).

31 La fonction zêta $\zeta(k)$ de Riemann est définie comme suit :

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots = \sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{j^k}.$$

Montrez que $\sum_{k \geqslant 2} \big(\zeta(k) - 1\big) = 1$. Que vaut $\sum_{k \geqslant 1} \big(\zeta(2k) - 1\big)$?

32 Soit $a \dot{-} b = \max(0, a - b)$. Prouvez que

$$\sum_{k \geqslant 0} \min(k, x \dot{-} k) = \sum_{k \geqslant 0} \big(x \dot{-} (2k+1)\big)$$

pour tout réel $x \geqslant 0$, et donnez une formule close pour ces sommes.

Questions subsidiaires

33 Soit $\bigwedge_{k \in K} a_k$ le minimum des a_k (ou leur borne inférieure si K est infini), en supposant que chaque a_i est soit réel, soit $\pm\infty$. Quelles sont les règles, analogues à celles qui régissent $\sum$ et $\prod$, qui sont valides pour $\bigwedge$ (voir l'exercice 25) ? *Les lois de la jungle.*

34 Montrez que si une somme $\sum_{k \in K} a_k$ est indéfinie dans le sens de (2.59), alors pour tout couple de nombres réels A^- et A^+, on peut trouver une suite de sous-ensembles finis $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ de K telle que

$$\sum_{k \in F_n} a_k \leqslant A^-, \text{ si } n \text{ est impair}; \qquad \sum_{k \in F_n} a_k \geqslant A^+, \text{ si } n \text{ est pair}.$$

35 Démontrez le théorème de Goldbach

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \cdots = \sum_{k \in P} \frac{1}{k-1},$$

où P est l'ensemble des "puissantes parfaites", défini récursivement comme suit :

$$P = \{ m^n \mid m \geqslant 2, n \geqslant 2, m \notin P \}.$$

La puissance parfaite corrompt. Parfaitement !

36 La "suite auto-descriptive" $\langle f(1), f(2), f(3), \ldots \rangle$ de Solomon Golomb est l'unique suite non décroissante d'entiers positifs qui contient exactement $f(k)$ occurrences de chaque entier k. Quelques instants de réflexion suffisent pour trouver le début de la suite :

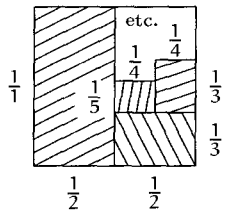
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

Soit $g(n)$ le plus grand entier m tel que $f(m) = n$. Montrez que

a $g(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

b $g\big(g(n)\big) = \sum_{k=1}^{n} kf(k)$.

c $g\big(g(g(n))\big) = \frac{1}{2}ng(n)\big(g(n)+1\big) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} g(k)\big(g(k)+1\big)$.

Sujet de recherche

37 Peut-on paver un carré de côté 1 par tous les rectangles de dimensions $1/k$ sur $1/(k+1)$, pour $k \geqslant 1$ (souvenez-vous que la somme de leurs aires est égale à 1) ?